О градиентном варианте метода Канторовича-Красносельского решения нелинейных уравнений

Для решения нелинейного уравнения с недиффиринцируемым оператором в работе [1] предложен аналог модифицированного метода Ньютона, сходящегося линейно с «хорошего» начального приближения. Проверка достаточного условия сходимости предлагаемого в [1] процесса практически не представляется возможным, поскольку глобальные константы, участвующие в формулировке теоремы 12.5[1] обычно получаются в процессе вычислений сильно завышенными, что не позволяет проверять выполнимость условий этой теоремы.

Ниже для решения уравнения

, (1)

где ,  предлагается нелокальный нерегуляризованый итерационный процесс:

, (2)

 и находится по одному из способов, предложенных в [2], , ,

 – производная Фреше оператора , оператор  – сопряженный к оператору 

Достоинства предлагаемого метода: сходимость с «плохого» начального приближения (нелокальная, точнее полулокальная сверхлинейная сходимость) и возможность счета по формуле без обращения оператора .

Докажем релаксационность процесса (2) при выполнении

,  (3)



,  (4)

и если *D* – замкнутое ограниченное множество, , то , .

Применяя теорему о среднем, имеем:

. (5)

Подставляя (2) в (5) получим соотношение:







 (6)

Из (6) после простых преобразований имеем





















. (7)

Здесь ,

.

Если ,

тогда  и в силу (4) все .

Из (7) при  следует, что , а из (4) имеем, что .

Из последних двух соотношений следует, что  и так как , то .

Индуктивные рассуждения позволяют сделать вывод о том, что последовательность итерационных параметров 🡭1, последовательность 🡮0.

Переходя к пределу в (7), получаем соотношение



 (8)

Из (8) следует сходимость последовательности  к нулю, откуда можно сделать вывод о сходимости последовательности , генерируемой процессом (2), к решению уравнения (1).

В ходе итерационного процесса параметр  при некотором  становится равным единице. Доказательство этого факта приведено в работе [2].

При подстановке в (7) , имеем

 (9)

Если обозначить , то из (9) следует, что

 (10)

Из (10) следует сверхлинейность построенного нами итерационного процесса. Таким образом, справедлива теорема 1.

**Теорема 1.** Пусть в области *D* существует решение уравнения (1). Операторы *f* и *g* удовлетворяют перечисленным выше условиям, имеют место оценки (3), (4) и . Тогда итерационный процесс (2) с  определяемым одним из предложенных в [2] способов со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к *х*\* – решению уравнения(1).